

بسمه تعالی

بخش نگاشت ها ارسال ۹۳/۹/۱۸ مسائل زوج حل شود تاریخ تحویل هفته آخر ترم

۱- نقش هر یک از منحنی های زیر را توسط نگاشت  $w = z^2$  بیابید:

a)  $y = -x$ , b)  $x = 3$ , c)  $y = x + 1$ , d)  $y^2 = x^2 + 1$

۲- نقش هر یک از نواحی زیر را توسط نگاشت  $w = z^2$  بیابید:

a)  $|z| > 2$ , b)  $0 \leq y \leq 1$ , c)  $-\frac{\pi}{4} < \arg(z) < \frac{\pi}{4}$

۳- نقش هر یک از منحنی های زیر را توسط نگاشت  $w = \frac{1}{z}$  بیابید:

a)  $0 < x < 1, 0 < y < 1$ , b)  $-\frac{\pi}{4} < \arg(z) < \frac{\pi}{4}$ , c)  $0 < \arg(z) < \frac{\pi}{4}$   
 d)  $|z + 1| = 1$ , e)  $y = x - 1$ , f)  $x = 1$ , g)  $|z - 3i| = 3$

۴- نقش ناحیه  $0 < \arg(z) < \frac{\pi}{4}$  را توسط نگاشت های زیر بیابید:

a)  $w = iz$ , b)  $w = z^2$ , c)  $w = iz^2$ , d)  $w = -iz^2$ , e)  $w = z^3$

۵- نشان دهید که تبدیل  $w = iz + i$  نیم صفحه  $x > 0$  را بر روی نیم صفحه  $v > 1$  می نگارد.

۶- نقش ناحیه  $y > 1$  را با تبدیل  $w = (1 - i)z$  بیابید.

۷- نقش هذلولی  $x^2 - y^2 = 1$  را با تبدیل  $w = \frac{1}{z}$  بیابید.

۸- مطلوبست تعیین تصویر منحنی  $|z| = 3$  تحت نگاشت  $w = \frac{25}{z}$ .

۹- تصویر ناحیه  $0 < \operatorname{Re}(z) < 1, \operatorname{Im}(z) > 0$  را تحت نگاشت  $w = \frac{1}{z}$  بیابید.

۱۰- تحت نگاشت  $w = \frac{1}{z}$  تصویر منحنی ها یا نواحی زیر را بیابید:

a)  $\arg(z) = \frac{\pi}{3}$ , b)  $|z| = 1$ ,  $\frac{\pi}{4} < \arg(z) < \pi$ , c)  $2 \leq x \leq 4, y = 0$ ,

d)  $-2 < y < -1, x = 0$ , e)  $0 < \operatorname{Re}(z) < 1$

۱۱- تابع  $w = z^2$  تبدیلی از صفحه  $z$  به صفحه  $w$  است. مثلثی با رئوس  $A(2,1)$ ,

$C(4,3), B(4,1)$  را در صفحه در نظر بگیرید. الف) نقش مثلث  $ABC$  را تحت نگاشت فوق

بیابید. ب) بدون استفاده از خاصیت همدیسی بودن  $w = z^2$  اندازه زاویه  $\hat{A}$  تصویر زاویه  $A$  را بیابید.

۱۲- نقش ناحیه  $-\frac{\pi}{4} \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{4}$  را تحت نگاشت  $w = iz^2 + 1$  بیابید.

۱۳- تصویر ناحیه  $D = \{x + iy | x \geq 0, |y| \leq 1\}$  را تحت نگاشت  $w = (1 + i) \sin(\pi iz)$  بیابید.

۱۴- تصویر ناحیه  $1 \leq |z| \leq e^{\frac{\pi}{2}}, 0 \leq \arg(z) \leq \pi$  را تحت نگاشت  $w = \text{Ln}(\sin(z))$  بیابید.

۱۵- نقش هر یک از نواحی زیر را توسط تبدیل  $w = e^z$  بیابید:

a)  $-1 < x < 1, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ , b)  $0 < x < 2, 0 < y < 1$ , c)  $-3 < x < -2, 0 < y < \frac{\pi}{4}$ , d)  $x \geq 0, 0 \leq y \leq \pi$ , e)  $-3 \leq x \leq -1, -\pi \leq y \leq \pi$

۱۶- نقش هر یک از نواحی زیر را با نگاشت  $w = \sin(z)$  بیابید:

a)  $0 < x < \frac{\pi}{2}, 0 < y < 2$ , b)  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, 0 < y < 1$ , c)  $0 < x < 2\pi, 1 < y < 2$

۱۷- نشان دهید که  $w = \sin(z)$  خط  $x = c$  (که  $0 < c < \frac{\pi}{2}$ ) را به طور یک بیک بروی شاخه سمت راست یک هذلولی می نگارد.

۱۸- نقش ناحیه  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, y \leq 0$  را تحت نگاشت  $w = \sin^2 z$  بیابید.

۱۹- نقش ناحیه  $|x| \leq \frac{\pi}{2}, y \geq 0$  را تحت نگاشت  $w = \text{Ln}(\sin(z))$  بیابید.

۲۰- تصویر ناحیه  $1 \leq \text{Im}(z) \leq 4$  را تحت نگاشت  $w = ie^z$  بیابید.

۲۱- تصویر ناحیه زیر را تحت نگاشت  $w = z^2$  به دست آورید:

$$D = \left\{ (x, y) \mid y \geq 0, xy \leq \frac{\pi}{2}, x^2 - y^2 \leq \pi, x \geq y \right\}$$

۲۲- تصویر نوار  $|x| \leq \frac{\pi}{4}, 1 \leq \text{Im}(z) \leq 2$  را تحت نگاشت  $w = \sinh(z)$  بیابید.

۲۳- الف) نشان دهید که تابع  $w = \sin(z)$  در  $x = \frac{\pi}{2}$  هم‌مدیس نیست. نقش  $y = 0$  را تحت این نگاشت مشخص کرده و آن را رسم کنید. ب) نقش ناحیه بین خطوط  $y = -2, y = \pm x$  را تحت نگاشت  $w = \frac{1}{z}$  مشخص و رسم کنید.

۲۴- تبدیل موبیوسی بنویسید که سه نقطه  $(\infty, 1, 0) \rightarrow (0, 2 + 2i, 4)$  را بنگارد و سپس نقش ناحیه واقع در داخل دایره  $|z - 2| = 2$  و خارج از دایره  $|z - 1| = 1$  را تحت نگاشت فوق بیابید.

۲۵- تصویر نواحی زیر را تحت نگاشت  $w = \frac{z-i}{z+i}$  بیابید

a)  $|z + i| < 1, b) x > 0, y > 0, |z + i| < 2$

۲۶- تبدیل موبیوسی بیابید که  $(0, i, \infty) \rightarrow (1, \infty, -1)$  را بنگارد. سپس تصویر ناحیه

$$D = \{x + iy: x \geq 1, y \geq 1\}$$

را تحت نگاشت  $w = i \frac{z-1}{z+1}$  بیابید.

۲۷- تبدیل موبیوسی بیابید که  $(i, \infty, 0) \rightarrow (0, 1, 1)$ . سپس مبدل ناحیه  $Im(z) \geq 0, |z| \leq 1$  را

تحت نگاشت  $w = i \frac{z-1}{z+1}$  بیابید.

۲۸- تبدیل دو خطی بنویسید که نقاط  $z_3 = -1, z_2 = i, z_1 = 1$  را بترتیب روی نقاط

$$w_3 = 1, w_2 = 0, w_1 = -1$$
 بنگارد.

۲۹- مطلوبست تعیین تبدیل دوخطی که الف) نقاط  $1, 0, -1$  را به ترتیب روی  $1, 1, 0$ -تصویر کند.

ب) نقاط  $\infty, 1, 0$  ترتیب روی  $0, 1, \infty$  تصویر نماید.

۳۰- تصویر ناحیه محدود به حلقه  $1 < |z| < 2$  را تحت نگاشت  $w = \frac{z+1}{z+2}$  بیابید.

۳۱- نشان دهید تبدیل  $w = z + \frac{1}{z}$  دایره  $r = c$  را روی بیضی

$$v = \sin(\theta), u = \left(c + \frac{1}{c}\right) \cos(\theta)$$

خواهد بود؟

۳۲- تصویر ناحیه محدود به خطوط  $y = \frac{\pi}{2}, y = \frac{\pi}{4}, x = \ln(2), x = 0$  را توسط تابع

$$w = \frac{e^z}{1+e^z}$$

۳۳- تابع تحلیلی  $w = f(z)$  بیابید که ناحیه  $1 \leq y \leq x + 1$  را روی ناحیه محدود به دایره

$$|w| = 1$$
 را بنگارد.

۳۴- تبدیل موبیوسی بنویسید که  $(\infty, 1, 2) \rightarrow (i, \infty, 0)$  و سپس با تبدیل  $w = \frac{z-2i}{z-i}$  مبدل ناحیه

$$D = \{z \mid |z| \leq 1, Re z \geq 0\}$$
 را بیابید.

۳۵- تبدیل موبیوسی بنویسید که  $(0, 1, \infty) \rightarrow (-1, \infty, 1)$ . سپس مبدل ناحیه

$$D = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, |z| \leq 1\}$$

را توسط آن بیابید.

۳۶- تبدیل موبیوسی بنویسید که ناحیه  $-\pi \leq \theta \leq -\frac{3\pi}{4}$  را روی دایره واحد بنگارد.

۳۷- تبدیل موبیوسی بنویسید که  $(0, 1, i) \rightarrow (1, \infty, -i)$ . سپس نقش ناحیه

$$D = \{x + iy \mid x > 1, y > -1\}$$

را تحت نگاشت  $w = \frac{z-1}{z-1+2i}$  بیابید.

۳۸- تبدیل موبیوسی بنویسید که سه نقطه  $(\infty, 1, 0) \rightarrow (0, 2 + 2i, 4)$  را بنگارد و سپس نقش ناحیه واقع در داخل دایره  $|z - 2| = 2$  و خارج از دایره  $|z - 1| = 1$  را تحت نگاشت فوق بیابید.

۳۹- تبدیل موبیوسی بنویسید که  $(-1, \frac{1}{3}, 1) \rightarrow (0, 2, \infty)$  . سپس مبدل ناحیه زیر را تحت آن نگاشت بیابید.  $D = \{z | 0 \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{4}\}$ .

۴۰- تبدیل ناحیه  $|z| < 1, \operatorname{Im}(z) \geq 0$  را تحت نگاشت  $w = i \frac{1-z}{1+z}$  را بیابید.

۴۱- مطلوبست تصویر نواحی زیر تحت نگاشت  $w = \frac{z-i}{z+i}$

الف) نقاط داخلی دایره ای به مرکز  $-i$  (ب) ناحیه  $|z + i| < 2, x > 0, y > 0$   
 ۴۲- تبدیل موبیوسی بنویسید تا  $(0, 1, i) \rightarrow (1, \infty, -1)$  . سپس تبدیل خط  $x + y = 1$  را تحت این نگاشت را بیابید.

۴۳- تبدیل موبیوسی بیابید که  $(-1, \infty, a) \rightarrow (0, 1, \infty)$  . سپس مبدل ناحیه زیر را به از  $a = 1$  به دست آورید:

$$D: x > 0, y > 0, |z| < 1$$

۴۴- نگاشت موبیوسی بنویسید تا  $(0, \infty, -i) \rightarrow (1, i, 0)$  . سپس مبدل ناحیه

$$0 \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{4}$$

را تحت نگاشت  $w = \frac{z-1}{z-i}$  بیابید.

۴۵- نگاشتی بیابید تا نوار تیم متناهی  $D = \{z: 0 \leq x, |y| \leq \frac{1}{2}\}$  را درون دایره واحد بنگارد.